

## Operando com o desconhecido

O procedimento de Bombelli, ousado para sua época, opera com o símbolo  $\sqrt{-1}$  como se fosse um número comum, ou seja:

$$(\sqrt{-1})^2 = -1$$

$$(\sqrt{-1})^3 = (\sqrt{-1})^2 \cdot \sqrt{-1} = -1 \cdot \sqrt{-1} = -\sqrt{-1}$$

Para felicidade geral, porém, os termos desconhecidos se cancelavam na expressão

$$x = (2 + \sqrt{-1}) + (2 - \sqrt{-1})$$

resultando então o valor 4, que já se sabia ser a solução da equação  $x^3 = 15x + 4$ . Isso (*o cancelamento dos termos "imaginários"*) não foi coincidência. Na verdade, o raciocínio de Bombelli foi criado em cima de uma hipótese que intencionalmente levava a esse cancelamento, ou seja:

$$\sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} = 2 + m\sqrt{-1} \quad \text{e} \quad \sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}} = 2 - m\sqrt{-1}$$

Ou seja, ele partiu do *conhecimento prévio* de uma solução da equação  $x^3 = 15x + 4$ , e criou um algoritmo que manipulava quantidades imaginárias (desconhecidas), *subordinando-as porém às mesmas regras operatórias habituais dos números conhecidos*.

Como na expressão final essas quantidades aparecem com sinais opostos e se cancelam (e aí também se vê o prolongamento de propriedades numéricas habituais), o resultado final é um número conhecido.

Podemos dizer também que Bombelli partiu do conhecimento prévio de que  $x = 4$  era a solução da equação e, munido das regras operatórias habituais entre os números conhecidos na época, aplicou arbitrariamente essas regras a quantidades "imaginárias" e *deu um "mergulho" no desconhecido não para entendê-lo, mas para eliminá-lo*.

Isso ilustra o fato de que os novos números despertavam as mais profundas suspeitas, sendo considerado "fantasmagóricos" ou "imaginários", tendo essa última designação permanecido até nossos dias, ao lado da expressão "números complexos".

## As limitações do método de Bombelli

Do ponto de vista prático, isto é, da efetiva resolução de equações de terceiro grau, o método de Bombelli teve reduzido alcance, pois, como vimos acima, era necessário o conhecimento prévio de uma das raízes da equação, o que nem sempre é possível; se fosse, obviamente nenhuma fórmula resolutiva seria necessária. Contudo, sem tal conhecimento, o algoritmo de Bombelli falha clamorosamente, como veremos no seguinte exemplo:

Considere um cubo de aresta  $= x$ ; seu volume será dado por  $V = x^3$ . Em seguida, imagine um paralelepípedo de base  $= 3$  e altura  $= x$ ; seu volume será dado por  $V_1 = 3x$ . O problema, então, é o seguinte: obter  $x$  de modo que  $V = V_1 + 1$ .

Obviamente, isso equivale a resolver a equação:  $x^3 = 3x + 1$ .

Mediante aplicação direta da fórmula de Cardano-Tartaglia, obteremos:

$$x = \sqrt[3]{(1/2) + \sqrt{(-3/4)}} + \sqrt[3]{(1/2) - \sqrt{(-3/4)}}$$

Mas essa resposta não faz nenhum sentido; o problema, porém deve possuir solução, como demonstra o seguinte raciocínio: quando  $x$  vale 1, temos que o volume do cubo é  $V = 1^3$ , ou seja, também vale 1, enquanto que o volume do paralelepípedo, mais um, vale  $3*x+1 = 3 + 1 = 4$ , portanto maior do que o volume do cubo.

Mas quando  $x=2$ , temos que o volume do cubo é  $V = 2^3$ , ou seja, 8, enquanto que o volume do paralelepípedo, mais um, vale  $3*2 + 1 = 7$ , portanto menor do que o volume do cubo.

Uma vez que esses volumes variam continuamente em função de  $x$ , a intuição nos diz que deve existir uma altura (compreendida entre 1 e 2) tal que os dois valores se igualem.

Em termos de uma linguagem matemática moderna, nós diríamos que a função contínua  $y = x^3 - 3*x - 1$  troca de sinal ao passar de  $x=0$  para  $x= 1$ , logo, admite ao menos uma raiz situada entre esses dois valores (é o chamado teorema do anulamento).

Tentemos aplicar o algoritmo de Bombelli para a solução encontrada:

$$x = \sqrt[3]{(1/2) + \sqrt{(-3/4)}} + \sqrt[3]{(1/2) - \sqrt{(-3/4)}}$$

Seguindo as pegadas do método usado por Bombelli, precisaremos determinar os valores de  $\sqrt[3]{(1/2) + \sqrt{(-3/4)}}$  e de  $\sqrt[3]{(1/2) - \sqrt{(-3/4)}}$

Acontece que **lá** ele *sabia* que o valor  $x=4$  era solução da respectiva equação, e agora nós não sabemos. Então teremos que fazer:

$$\sqrt[3]{(1/2) + \sqrt{(-3/4)}} = x + y* \sqrt{-1}$$

e

$$\sqrt[3]{(1/2) - \sqrt{(-3/4)}} = x - y* \sqrt{-1}$$

Notem que aparecem duas variáveis,  $x$  e  $y$ , enquanto que no caso de Bombelli ele já sabia que 4 era solução, e assim atribuiu para a parte "real" de cada uma das raízes cúbicas o valor 2, valores esse que somados reproduzem o valor 4.

Elevando ao cubo e agrupando as partes “reais” e “imaginárias”, teremos:

$$x - 3*x*y^2 = 1/2$$

e

$$3*x^2*y - y^3 = \sqrt{3}/2$$

Isso mostra que o método de Bombelli é redundante, pois para resolver uma equação de terceiro grau precisaremos, em geral, resolver um sistema de duas equações de terceiro grau!

No próximo segmento deste artigo mostraremos como o assunto ficou em suspenso por mais de 2 séculos, até que, quase simultaneamente, Wessel, na Dinamarca, Argand, na Suíça, e Gauss, na Alemanha tiveram a idéia de representar os novos números graficamente.

[Página seguinte](#)   [Página anterior](#)   [Início](#)