Um pouco de álgebra dos números complexos

a) Conceito de conjugado de um número complexo

Por definição, chama-se *conjugado* de um número complexo **a = x + yi** ao seguinte número complexo: **ã = x - y.i**. Em termos de pares ordenados, sendo **a = (x, y)**, a definição seria escrita assim: **ã = (x, -y)**. Observe que o **afixo de ã** (isto é, a representação gráfica do conjugado de a) consiste num ponto do plano **simétrico ao afixo de a**, em relação ao eixo real.

Esse conceito apresenta uma propriedade interessante: **a * ã =** $x^2 + y^2$ (ou, equivalentemente, a * a = $|a|^2$).

Por exemplo, se a = 1 + 2.i, então seu conjugado é ã = 1 - 2.i , e o produto a * ã vale 5. Confira:

(1 + 2.i) . (1 - 2.i) = $1^2 + 2^2 = 5$

Divisão de números complexos

Vejam como a coisa está se tornando **abstrata:** queremos dividir, por exemplo, $z_1 = 2 + 3.i$ por $z_2 = 1 + 2.i$. Em termos de pares ordenados, isso significa dividir **(2, 3)** por **(1, 2)**.

Dividir pares ordenados - vejam aonde o desenvolvimento da teoria dos números complexos está nos conduzindo!

Recapitulemos um pouco:

Primeiro, tivemos que definir o produto de dois pares ordenados, coisa que já deu bastante trabalho, pois precisávamos encontrar uma definição que estendesse a multiplicação de números reais para o campo complexo, tendo em vista ainda que era nosso objetivo obter, nesse novo conjunto de números, a raiz quadrada de -1.

Depois, tivemos que verificar que as propriedades associativa, comutativa, distributiva, etc., da multiplicação e adição de números reais, continuavam válidas no campo complexo. Finalmente, tivemos que verificar que a unidade imaginária **i** merecia mesmo esse nome, ou seja, $i^2 = -1$.

E agora estamos querendo dividir pares ordenados... felizmente, essa divisão é definida em termos da multiplicação, aliás seguindo as pegadas do campo real, onde dizemos:

dividir o número d_1 pelo número d_2 diferente de zero significa obter o número **m** tal que $d_1 = m * d_2$.

Por exemplo: **19** dividido por **2** vale **9,5** porque **9,5** * **2** = **19**.

De maneira inteiramente análoga define-se esse conceito em C:

Dividir um número complexo $z_1 = a + b.i$ pelo número complexo não nulo $z_2 = c + d.i$ significa obter um terceiro número complexo **w = p + q.i** de modo que $z_1 = w.z_2$. Nesse caso, escrevemos: $z_1 / z_2 = w$.

Portanto, a divisão de z_1 por z_2 **(não nulo)** implica em obter um terceiro número, **w**, tal que $z_1 = w.z_2$. Será que sempre existe esse número? nesse caso, como é ele?

Operacionalmente, a determinação de **w** utiliza o conceito de conjugado de um número complexo, visto acima. Isto é, precisamos obter **w = p + q.i** tal que:

$w.z_2 = z_1$

ou seja:

(p + q.i) * (c + d.i) = a + b.i

Multipliquemos a igualdade membro a membro pelo conjugado de z_2, isto é, por **(c - d.i)**:

(p + q.i) * (c + d.i) * (c - d.i) = (a + b.i) * (c - d.i)

$(p + q.i) * (c^2 + d^2) = (a.c - b.d) + (b.c - a.d).i$

$p + q.i = ((a.c - b.d) + (b.c - a.d).i) / (c^2 + d^2)$ (isto é possível, pois $z_2 = c + d.i$ não é nulo)

Identificando as partes reais e imaginárias, temos:

$p = (a.c - b.d) / (c^2 + d^2)$

e

$q = (b.c - a.d) / (c^2 + d^2)$

Em termos de pares ordenados, podemos escrever:

$(a, b) / (c, d) = ((a.c - b.d) / (c^2 + d^2), (b.c - a.d) / (c^2 + d^2))$

Realmente, é uma fórmula horrível, por favor, jamais a decore!

Mas pelo menos ela demonstra que sempre existe, em C, o resultado da divisão de um número complexo por um outro, desde que este último seja diferente de (0, 0),

Observação: na prática, para dividir dois números complexos, basta multiplicar o primeiro pelo conjugado do segundo. Exemplo:

$(2 + 3.i) / (1 + 2.i) = ((2 + 3.i) * (1 - 2.i)) / ((1 + 2.i) * (1 - 2.i))$

$(2 + 3.i) / (1 + 2.i) = (2 - 4.i + 3.i - 6.i^2) / (1^2 + 2^2)$

$(2 + 3.i) / (1 + 2.i) = (8 - i) / 5$

Finalmente:

$(2 + 3.i) / (1 + 2.i) = 8/5 - i/5$

Você pode "tirar a prova" facilmente; basta multiplicar (1 + 2.i) por (8/5 - i/5); o resultado será realmente (2 + 3.i).

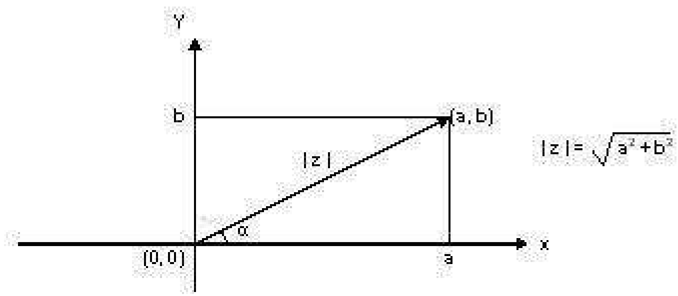
Embora o conceito de divisão de números complexos tenha se inspirado nos números reais, veja como o desenvolvimento da teoria dos complexos realmente abre avenidas inteiramente novas de percepção e significado.

A forma polar (ou trigonométrica) dos números complexos

Inicialmente, vejamos o que se entende por módulo de um número complexo z = a + b.i.
Por definição, chama-se módulo de z é o seguinte número positivo ou nulo:

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

Agora, observe a figura abaixo:



Temos: $\cos\alpha = \dfrac{a}{|z|}$

$\operatorname{sen}\alpha = \dfrac{a}{|z|}$

logo: $a = |z|.\cos\alpha$

$b = |z|.\operatorname{sen}\alpha$

$z = a + b.i = |z|.\cos\alpha + |z|.\operatorname{sen}\alpha.i$

Forma polar de $z = a + b.i$:

$z = |z|.(\cos\alpha + i.\operatorname{sen}\alpha)$

Vemos que um número complexo não nulo z = a + b.i (ou, se preferirem, z = (a, b)), ao ser representado no plano de Argand-Gauss, dá origem a uma figura onde se forma um triângulo retângulo cuja hipotenusa cuja medida é exatamente o **módulo** de z, sendo **α** o ângulo formado pelo eixo real e o segmento que une a origem O = (0, 0) com o ponto do plano que representa **z** (ponto esse denominado **afixo** de z).

A figura acima, de forma bem detalhada, mostra que um número complexo não nulo z = a + b.i pode ser representado na **forma polar**, (ou *forma trigonométrica*), que é a seguinte: **z = |z|.(cos α + i.sen α)**.

Essa fórmula permite resolver completamente a potenciação e radiciação no campo dos números complexos, operações essas que são definidas de maneira análoga às correspondentes operações do campo real.

Isso se deve ao fato de que, para elevar um número complexo ao quadrado, por exemplo, obtemos um resultado incrível que facilita grandemente esse tipo de operação.

Temos:

$$z = |z|.(\cos\alpha + i.\operatorname{sen}\alpha)$$

$$z^2 = |z|^2.(\cos\alpha + i.\operatorname{sen}\alpha)^2$$

$$z^2 = |z|^2.(\cos^2\alpha - \operatorname{sen}^2\alpha + 2.\operatorname{sen}\alpha.\cos\alpha.i)$$

Lembrando, da trigonometria, que

$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \operatorname{sen}^2\alpha$$

e

$$\operatorname{sen} 2\alpha = 2.\operatorname{sen}\alpha.\cos\alpha$$

podemos escrever:

$$\mathbf{z^2 = |z|^2.(\cos 2\alpha + i.\operatorname{sen} 2\alpha)}$$

Uma fórmula incrível: ela nos informa, para elevar um número complexo ao quadrado, não apenas o seu módulo deve ser elevado ao quadrado, mas também deve-se duplicar o ângulo que ele forma com o eixo x (isto é, o ângulo formado pelo segmento OP e o eixo real, onde O = (0, 0) e P = *afixo* de z = a + b.i).

E o mais importante: everifica-se que essa fórmula se preserva para qualquer outro expoente inteiro, positivo ou negativo.

Em outras palavras, pode-se provar que:

$$z^n = |z|^n .(\cos n\alpha + i . \operatorname{sen} n\alpha)$$

Curiosidades:

1) Note que essa fórmula confirma um fato comum para números reais, isto é: números reais positivos elevados a qualquer expoente resultam em valores positivos, mas números reais negativos somente quando elevados a expoentes **pares** resultam em valores **positivos**; quando elevados a expoentes ímpares resultam em valores negativos;

Você pode checar esse fato na fórmula acima, pois: os números reais positivos, "vistos" como números complexos, formam ângulo de **0^o** com o eixo x, por isso, quando elevados a qualquer expoente sempre "cairão" sobre sobre o lado positivo do eixo x, visto que **sen 0^o = 0** e **cos 0^o = 1**

Já os números reais negativos, "vistos" como números complexos, formam ângulo de **180^o** com o eixo x, e por isso, quando elevados a expoentes pares, "cairão" sobre sobre o lado *positivo* do eixo x, visto que formarão ângulos **congruentes com 0^o**, portanto com o seno valendo zero e o cosseno valendo 1.

Mas, se elevados a expoentes ímpares "cairão" sobre sobre o lado *negativo* do eixo x, visto que formarão ângulos **congruentes com 180^o**, portanto com o seno valendo zero e o cosseno valendo -1.

2) Suponha que |z| = 1, isto é, o número complexo possui módulo unitário. Nesse caso, seu afixo (o ponto que o representa no plano de Argand-Gauss) estará numa circunferência de raio unitário centrada na origem. Substituindo |z| por 1 na fórmula da potenciação, temos:

$$(\cos \alpha + i . \operatorname{sen} \alpha)^n = (\cos n\alpha + i . \operatorname{sen} n\, \alpha)$$

Um resultado notável, chamada fórmula de **De Moivre** (em homenagem ao notável matemático francês, que viveu de1667 a 1754). Se você imaginar números complexos de módulo unitário como um vetor centrado na origem e com extremidade numa circunferência também de raio unitário, essa fórmula mostra que ao elevar tais números ao quadrado, cubo, etc., tais vetores "**giram**" no sentido anti-horário, respectivamente duplicando, triplicando, etc. os ângulos que originalmente eles faziam com o eixo real.

Em particular, temos: **$i = 0 + 1.i = \cos 90^o + i. \operatorname{sen} 90^o$**

Vejamos as 5 primeiras potências de **i**:

$i^1 = \cos 90^o + i. \operatorname{sen} 90^o = 0 + 1.i =$ **i** (é a própria unidade imaginária)
$i^2 = \cos 180^o + i. \operatorname{sen} 180^o = -1 + 0.i =$ **-1** (cai sobre o eixo real, formando ângulo de 180^o com o eixo real)
$i^3 = \cos 270^o + i. \operatorname{sen} 270^o = 0 + (-1).i =$ **-i** (cai sobre o eixo imaginário, formando ângulo de 270^o com o eixo real)
$i^4 = \cos 360^o + i. \operatorname{sen} 360^o = 1 + 0.i =$ **1** (cai sobre o eixo real, formando ângulo de 360^o com o eixo real)
$i^5 = \cos 450^o + i. \operatorname{sen} 450^o = 0 + 1.i =$ **i** (cai sobre o eixo imaginário, formando ângulo de 450^o com o eixo real)

e assim por diante, ciclicamente, pois os ângulos obtidos ficam congruentes com os já obtidos em etapas anteriores.

Radiciação em C

A fórmula **$z^n = |z|^n .(\cos n\alpha + i . \text{sen } n\alpha)$** , que nos mostra como obter e potência enésima de $z = |z|.(\cos \alpha + i.\text{sen } \alpha)$, não será aqui demonstrada; tudo o que fizemos foi verificar sua validade apenas para o caso particular n=2. Ela é válida, porém, para qualquer valor inteiro de n. Sugerimos aos interessados que consultem bons livros de Matemática do Colegial, para ver a demonstração dessa importantíssima fórmula.

Consideremos agora o problema da extração de raízes não apenas quadradas, mas de qualquer índice, no campo complexo.

Seja z um número complexo genérico, cuja forma trigonométrica é $z = |z|.(\cos \alpha + i.\text{sen } \alpha)$, e queremos obter um outro número complexo, $w= |w|.(\cos \beta + i.\text{sen } \beta)$, que seja uma raiz enésima de z.

Isto é, w deve ser tal que satisfaça a seguinte igualdade: **$w^n = z$**

Solução:

Pela fórmula da potenciação, podemos escrever que: **$w^n = |w|^n .(\cos n\beta + i . \text{sen } n\beta)$**
Logo:

$$|w|^n= |z|$$

$$\cos n\beta = \cos \alpha \qquad (I)$$

$$\text{sen } n\beta = \text{sen } \alpha \qquad (II)$$

A solução será dada por:

$|w| = |z|^{(1/n)}$, ou seja, o módulo de w será a raiz enésima do módulo de z, o que não é nenhum problema pois trata-se da extração de raiz de um número positivo.

E quanto ao ângulo β que o vetor **Ow** forma com o eixo real? (estamos representando por **Ow** o segmento que une a origem do plano de Argand-Gauss ao afixo do número complexo **w**).

Revisando um pouco de Trigonometria, não é difícil ver que a solução do sistema de equações trigonométricas (I) e (II) será dada por:

$$n\beta = \alpha + k * 360^o \qquad \text{(onde } k = 0, 1, 2, 3, ...)$$

Logo,

$$\beta = (\alpha + k * 360^o)/n$$

Aplicação

Por exemplo, determinemos as raízes cúbicas da própria unidade imaginária i.

Temos:

$$i = 0 + 1.i = \cos 90^o + i. \text{sen } 90^o$$

Seja $w= |w|.(\cos \beta + i.\text{sen } \beta)$
Então, se w é uma raiz cúbica de **i**, então, como **i** tem módulo 1, teremos necessáriamente |w| = 1.
Portanto, **$w = \cos \beta + i.\text{sen } \beta$**.

Tudo que precisamos é obter os valores de b. Pela aplicação da fórmula de De Moivre, virá:

$w3 = \cos 3\beta + i.\text{sen } 3\beta$

Logo, **$3\beta = 90^o + k * 360^o$**

assim, **$\beta = 30^o + k * 120^o$** (com k variando de 0 a 2, porque valores de 3 em diante não representam novas soluções)

Eis portanto as soluções:

$k = 0 \Longrightarrow w_0 = \cos 30^o + i.\text{sen } 30^o$

$k = 1 \Longrightarrow w_1 = \cos 150^o + i.\text{sen } 150^o$

$k = 2 \Longrightarrow w_2 = \cos 270^o + i.\text{sen } 270^o$

Finalizando

Mais uma vez, queremos recordar que, embora seja repleto de descobertas fascinantes, não nos interessa tanto abarcar, neste modesto trabalho, todo o desenvolvimento da teoria dos números complexos, a dedução das fórmulas, a aplicação delas na resolução de problemas, etc.

Interessa-nos principalmente desvendar os mistérios do assunto, como tudo isso surgiu e se desenvolveu ao longo dos séculos. E foram séculos mesmo. Hoje, como herdeiros de todas essas descobertas, desse intenso trabalho desenvolvido por matemáticos geniais, não podemos ser meros aplicadores de fórmulas!

Vejamos, porém, alguns pontos interessantes, que raramente são comentados.

1) "Imersão" de R em C

Um ponto que ficou pendente é a melhor fundamentação da identidade que se faz entre um número real x e o número complexo (x, 0).

O que permitiu tal identificação, até agora, foi simplesmente o fato de que um número real x tem a mesma representação gráfica que o par ordenado (x, 0), escrevendo-se então: **x = (x, 0)**. Mas, como já dissemos, devemos ter em mente que x é um número de uma dimensão, e (x, 0) é um número de duas dimensões.

Quem nos garante que toda e qualquer operação que se faça com (x, 0), no campo complexo, conduzirá aos mesmos resultados que as correspondentes operações, restritas ao campo real, dariam com o número real x?

Essa é uma pergunta sutil, porém de fundamental importância. Ela tende a passar despercebida; simplesmente consideramos que **x = (x, 0)** e vamos em frente.

Tomemos, por exemplo, a fórmula da potenciação em C:

$$z^n = |z|^n.(\cos n\alpha + i . \text{sen } n\alpha)$$

Vimos nesta mesma página, na primeira "curiosidade", uma amostra do que queremos dizer:

"*Note que essa fórmula confirma um fato comum para números reais, isto é: números reais positivos elevados a qualquer expoente resultam em valores positivos, mas números reais negativos somente quando elevados a expoentes **pares** resultam em valores **positivos**; quando elevados a expoentes ímpares resultam em valores negativos*".

O que está em causa é o seguinte: será que as operações em C, por exemplo a potenciação acima, quando aplicadas a números reais, dará sempre os mesmos resultados que a potenciação comum de números reais?

Idêntica pergunta podemos fazer com respeito à radiciação de números complexos. Trata-se de uma fórmula razoavelmente complicada, que envolve elementos trigonométricos. Ela permite inclusive extrair raízes quadradas de números negativos, coisa que a radiciação comum não permite fazer em R. Precisaríamos saber se as raízes complexas de números reais positivos sempre resultam os mesmos valores que as raízes reais comuns desses mesmos números.

Para responder a essas perguntas, define-se a função x ---> (x, 0), que associa, a cada número real, o par ordenado em que esse número x figura como primeira coordenada, sendo nula a segunda. Trata-se de uma função biunívoca, que possui as seguintes propriedades:

f(x + y) = f(x) + f(y)

e

f(x.y) = f(x).f(y)

A demonstração da primeira propriedade é simples:

f(x + y) = (x + y, 0) = (x, 0) + (y, 0) = f(x) + f(y)

Quanto à segunda, lembre-se de que a definição de produto de pares ordenados é dada pela seguinte expressão:

(a, b) * (c, d) = (a.c – b.d) + (a.d + b.c)

Logo:

f(x.y) = (x.y, 0) = (x, 0) * (y, 0) = f(x).f(y)

Isso significa basicamente que, ao somar números reais x e y, obtendo resultado z, a adição em C com os números complexos (x, 0) e (y, 0) dará o resultado (z, 0). E inversamente.

Da mesma forma, ao multiplicar números reais x e y, obtendo resultado z, a multiplicação em C com os números complexos (x, 0) e (y, 0) dará o resultado (z, 0). E inversamente.

Portanto, o conjunto dos números reais e o conjunto dos números complexos da forma (x, 0), para todo x real, comportam-se do mesmo modo no que diz respeito às operações de adição e multiplicação, o mesmo ocorrendo com as operações de divisão e potenciação, visto que estas são definidas a partir das duas anteriores.

Assim, os dois conjuntos numéricos, embora formalmente diferentes, não apenas admitem a mesma representação gráfica - pontos do eixo real - como também se comportam do mesmo modo em relação às operações de adição e multiplicação. Dizemos então que os dois conjuntos são *isomorfos* (possuem a mesma forma), e a função x ---> (x, 0), definida anteriormente, é chamada de *isomorfismo*, isto é, uma função biunívoca que preserva aquelas operações. Diz-se também que R está "imerso" em C.

A expressão x = (x, 0) agora tem um significado muito mais preciso; operar em C com (x, 0) conduz aos mesmos resultados que aplicar a mesma operação em R, sobre a variável x.

2) Há relações de ordem em C?

Um fato muito interessante no plano complexo é o seguinte: **não se trabalha com relações de ordem em C**. Em outras palavras, dados os números complexos z e w, não há entre eles nenhuma relação do tipo z>w, ou z<w.

Em particular, um número complexo não é positivo ou negativo! E por quê?

Consideremos, por exemplo, a unidade imaginária i. Se acaso tivermos **i** > **0**, isto é, se i for positivo, então deveríamos poder multiplicar os dois lados da desigualdade pelo próprio **i**, sem inverter o sentido dessa desigualdade. Pelo menos é assim que se comportam os números reais. Se x for um número real positivo, então $\mathbf{x^2}$ também será positivo.

Mas veja o que aconteceria:

i > **0**

i*i > **i * 0**

-1 > **0** (**absurdo**)

Idêntica contradição ocorre se você considerar que i é negativo. Ora, em R se tivermos um número negativo, seu oposto será positivo. Certamente desejamos que isto se estenda ao campo complexo, então teríamos **-i>0**. Nesse caso ao multiplicarem-se ambos os membros da desigualdade por **-i** ela deveria manter seu sentido. Como veremos a seguir, porém, tal não ocorre em C:

i < 0

i*(-i) < 0

-i*i = < 0

-(-1) = 1 < 0 (absurdo)

Portanto, de nada vale definir relações de ordem em C, pois ficariam **incompatíveis** com as relações de ordem comuns no campo dos números reais.

Não deixa de ser irônico que o problema que levou à descoberta dos novos números, ou seja, a extração de raízes quadradas de números negativos, simplesmente inexiste no novo campo numérico, visto que ali não há números negativos.

Fazendo uma pequena incursão ao campo filosófico, seria o caso de pensar se muitos dos problemas que nos atormentam, enquanto seres humanos falíveis e limitados, não ficariam resolvidos numa dimensão superior, pelo simples fato de ali não existirem.

Que dimensão é essa? **-** pergunta o homem. E, de imediato, nesse tipo de assunto, uma dúzia de "soluções" nos são apresentadas pelos fiéis de qualquer tipo de crença... não podemos, porém, fazer como Bombelli em seu algoritmo, que afinal foi uma pseudo-solução com a qual ele fugiu da necessidade de descobrir o desconhecido.

3) As equações de quinto grau em diante são resolúveis?

Vimos que, em 1542, em sua obra "Ars Magna", Cardano publicou a solução das equações de terceiro e quarto graus, exibindo as correspondentes fórmulas resolutivas que se expressam através de radicais. Isso foi a origem da necessidade de considerar a existência de novos números, o que veio a ser descoberto ao longo de vários séculos.

Pois bem, nesse meio tempo alguns matemáticos se empenharam em tentar descobrir se existe uma fórmula resolutiva para equações de quinto grau, sexto grau, etc, por meio de radicais.

Coube ao genial matemático francês Evariste de Galois (1811-1832), complementando um trabalho de Niels Abel, matemático norueguês que precedeu Galois no estudo do assunto, demonstrar a impossibilidade dessa resolução. Portanto, **equações completas de grau 5 ou maior não são resolúveis por meio de radicais**.

Abel morreu muito jovem, com 27 anos, e Galois ainda mais jovem, com apenas 21 anos de idade, morto tragicamente em um duelo. O trabalho de Abel e Galois ainda hoje é estudado em cursos avançados de Matemática.

Final

Esperamos que esse trabalho possa ter contribuído para esclarecer dúvidas talvez já antigas, ou despertar o interesse para buscar com rigor e profundidade o entendimento de qualquer conteúdo científico, mas sem desprezar o estudo minucioso das descobertas, das dificuldades, dos insights de nossos antecessores. Boa sorte a todos.

José Carlos C. Cavalcanti

Página anterior Início